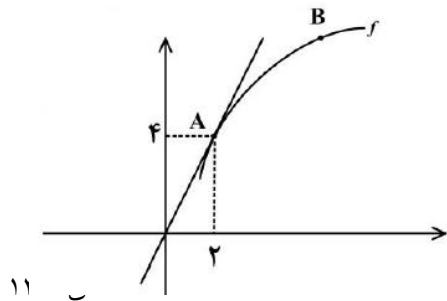


فصل چهارم: مشتق

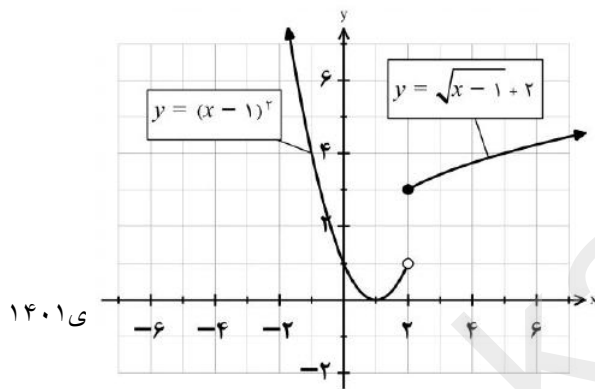


۱۱ -

۱- نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:

الف) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ را بیابید.

ب) شیب خط های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



۱۴۰۱ ی

۲ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} + 2 & x \geq 2 \\ (x-1)^2 & x < 2 \end{cases}$ به صورت

مقابل است:

الف) آیا تابع f در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x = 2$ را به دست آورید.

۳- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = x(x-1)(x+1)$

ب) $g(x) = \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^3$

۱۴۰۱ ی-

۴ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم.

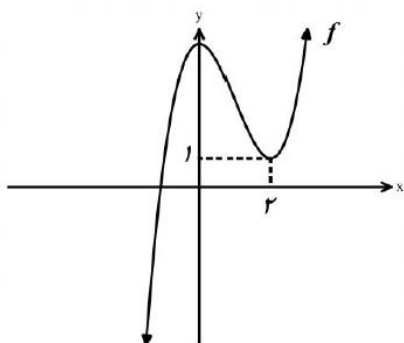
فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -4t^2 + 40t$ به دست می آید.

الف) سرعت متوسط در بازه $[2, 4]$ را بیابید.

ب) در چه زمانی سرعت لحظه ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است؟

دی ۱۴۰۱

فصل چهارم: مشتق



دی ۱۴۰۱

۵- نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.

شهریور ۱۴۰۱

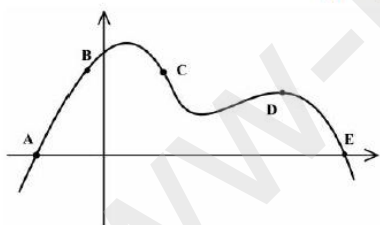
۶- درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

تابع $y = [x]$ در صفر مشتق پذیر است.

۷- از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه:

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



شهریور ۱۴۰۱

۸- معادله نیم مماس راست تابع $f(x) = |x^2 - 1|$ را در نقطه ای به طول $x = 1$ واقع بر منحنی بنویسید.

شهریور ۱۴۰۱

فصل چهارم: مشتق

۹- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف) $f(x) = \frac{-2x+3}{x+4}$ ب) $g(x) = (\sqrt{3x+1})(x^2+2x)$

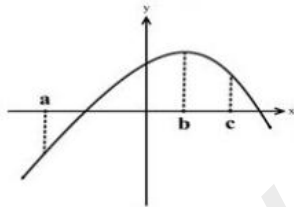
شهریور ۱۴۰۱

۱۰- تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را بر حسب سانتی متر تا حدود شصت ماهگی نشان می دهد، که

در آن x مدت زمان پس از تولد (بر حسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0, 25]$ چقدر است؟
شهریور ۱۴۰۱

۱۱- با توجه به نمودار تابع f ، اگر شیب خط مماس در نقاط a, b, c به ترتیب با m_c, m_b, m_a نمایش

داده شود. کدامیک از گزینه های زیر صحیح است؟



ب) $m_b > m_a > m_c$

الف) $m_c > m_b > m_a$

ت) $m_c = m_b = m_a$

پ) $m_a > m_b > m_c$

خرداد ۱۴۰۱

۱۲- اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(2) = 3, f'(2) = 5, g(2) = 8, g'(2) = -6$ حاصل $(fg)'(2)$ را به دست

آورید.

خرداد ۱۴۰۱

۱۳- اگر $f(x) = \begin{cases} ax+1 & x < 0 \\ x^2+3x+1 & x \geq 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید.

خرداد ۱۴۰۱

فصل چهارم: مشتق

۱۴- مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

$$f(x) = \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

خرداد ۱۴۰۱

۱۵- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازه $[0, 5]$ (t بر حسب ثانیه) داده شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0, 5]$ و سرعت لحظه ای را در لحظه $t = 2$ به دست آورید.

خرداد ۱۴۰۱

۱۶- مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -1$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases}$$

دی ۱۴۰۰

۱۷- مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = (x^2 + 2x - 1)^5$

ب) $g(x) = (\sqrt{3x+2})(x^3 + 1)$

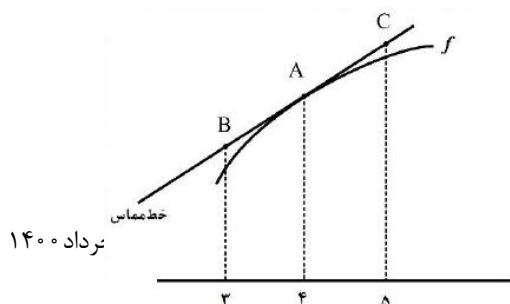
دی ۱۳۰۰

فصل چهارم: مشتق

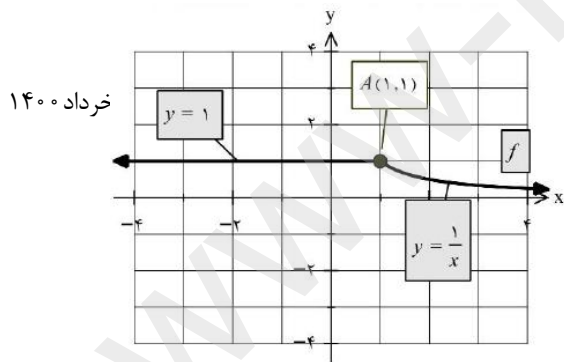
۸ اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f'(1) = 3, g'(1) = 5$ مقادیر $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.

دی ۱۴۰۰

۱۹- معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ برحسب متر در بازه $[0, 5]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0, 5]$ با هم برابرند؟



۲۰ برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



۲۱- با محاسبه مشتق راست و مشتق چپ تابع f

در نقطه A ، نشان دهید که تابع f در نقطه A مشتق پذیر نیست.

۲۲- مشتق تابع های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

الف) $f(x) = \frac{9x-2}{\sqrt{x}}$

ب) $g(x) = (3x^2 - 4)(2x - 5)^3$

خر داد ۱۴۰۰

فصل چهارم: مشتق

۲۳. جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم.

ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید:

الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5, 8]$ به دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم 35 m/s است.

۱۴۰۰.

www-kanoon-ir

پاسخ فصل چهارم: مشتق

دی ۱۴۰۱

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = 2 \quad (0/5) \quad \text{الف-۱}$$

(الف-۱)

(ب)

$$m_A > m_B \quad (0/25)$$

دی ۱۴۰۱

الف-۲ خیر (0/25)

(ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty, 2)$ مشتق پذیر است. (0/5)

$$x \geq 2 : f(x) = \sqrt{x-1} + 2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \rightarrow f'_+(2) = \frac{1}{2} \quad \text{پ}$$

دی ۱۴۰۱

$$\text{الف) } f(x) = x^x - x \rightarrow f'(x) = 3x^x - 1 \quad \text{-۳}$$

$$\text{ب) } g'(x) = 3 \left(\frac{2x-1}{x+1} \right)^2 \left(\frac{2(x+1) - 1(2x-1)}{(x+1)^2} \right)$$

در قسمت الف به سایر روشهای صحیح نمره تعلق گیرد.

پاسخ فصل چهارم: مشتق

دی ۱۴۰۱

$$\text{الف) سرعت متوسط (الف)} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{96 - 64}{2} = 16 \quad (0/5) \quad -4$$

$$\text{ب) } h'(t) = -8t + 40 = 16 \quad (0/25) \rightarrow t = 3 \quad (0/25)$$

دی ۱۴۰۱

$$\begin{aligned} f'(2) = 0 \quad (0/25) &\rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \quad (0/25) \quad b = -3 \quad (0/25) \quad -5 \\ f(2) = 1 \quad (0/25) &\rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \quad (0/25) \quad d = 5 \quad (0/25) \end{aligned}$$

شهریور ۱۴۰۱

۶- نادرست

شهریور ۱۴۰۱

۷- الف) A (0/25)

ب) C (0/25)

صفحه: ۷۶

شهریور ۱۴۰۱

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 - 1| - 0}{x - 1} = 2 \quad (0/25) \Rightarrow y - 0 = 2(x - 1) \quad (0/5) \quad -8$$

صفحه: ۷۹

پاسخ فصل چهارم: مشتق

شهریور ۱۴۰۱

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{\overbrace{-2(x+4) - 1(-2x+3)}^{(0/5)}}{\underbrace{(x+4)^2}_{(0/25)}}$$

$$\text{ب) } g'(x) = \frac{3}{\underbrace{2\sqrt{3x+1}}_{(0/5)}}(x^2+2x) + \frac{(2x+2)(\sqrt{3x+1})^{-9}}{(0/5)}$$

صفحه: ۹۲

شهریور ۱۴۰۱

$$\text{آهنگ متوسط رشد} = \frac{f(25) - f(0)}{\underbrace{25 - 0}_{(0/25)}} = \frac{15 - 50}{\underbrace{25}_{(0/5)}} = \frac{7}{5} \quad (0/25)$$

-۱۰

صفحه: ۹۶

خرداد ۱۴۰۱

پ-۱۱

خرداد ۱۴۰۱

$$(fg)'(2) = \overbrace{f'(2)g(2) + f(2)g'(2)}^{(0/5)} = 5 \times 8 + 3(-6) = 22 \quad (0/5)$$

-۱۲

صفحه: ۸۷

خرداد ۱۴۰۱

$$\left. \begin{array}{l} f'(0) = 3 \quad (0/5) \\ f'(-0) = a \quad (0/5) \end{array} \right\} \rightarrow a = 3 \quad (0/25)$$

۱۳- تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته است. (۰/۲۵)

صفحه: ۹۱

پاسخ فصل چهارم: مشتق

خرداد ۱۴۰۱

$$f'(x) = \frac{\frac{9(x+1) - 1(9x-2)}{(x+1)^2} \quad (0/5)}{2 \sqrt{\frac{9x-2}{x+1}} \quad (0/25)} \quad -14$$

صفحه: ۸۸

خرداد ۱۴۰۱

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{30 - 10}{5} = 4 \quad (0/25) \quad -15$$

$$f'(t) = 2t - 1 \quad (0/25) \rightarrow f'(2) = 2(2) - 1 = 3 \quad (0/25)$$

صفحه: ۱۰۰

دی ۱۴۰۰

۱۶- تابع در $x = 1$ پیوسته است. (۰/۲۵)

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - (-1)} = -2 \quad (0/5)$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x + 6 - 4}{x - (-1)} = 2 \quad (0/5)$$

$$\Rightarrow f'_+(-1) \neq f'_-(-1) \quad (0/25)$$

$f'(-1)$ موجود نیست. صفحه: ۹۱

پاسخ فصل چهارم: مشتق

دی ۱۴۰۰

الف) $f'(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^4(2x + 2)$ (۰/۷۵) -۱۷

ب) $g'(x) = \underbrace{\left(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}}\right)}_{(۰/۵)}(x^2 + 1) + \underbrace{(\sqrt{3x+2})(2x)}_{(۰/۵)}$

صفحه: ۹۲

دی ۱۴۰۰

$\underbrace{3f'(1)}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{2g'(1)}_{(۰/۲۵)} = 9 + 10 = 19$ (۰/۲۵) -۱۸

صفحه: ۹۲

دی ۱۴۰۰

سرعت متوسط $\Rightarrow \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$ (۰/۲۵) -۱۹

سرعت لحظه ای $\Rightarrow f'(t) = 2t - 1 = 4$ (۰/۲۵) $t = \frac{5}{2}$ (۰/۲۵)

صفحه: ۱۰۰

خرداد ۱۴۰۰

$\frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = 1/5 \Rightarrow B(3, 22/5)$ (۰/۵) $\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = 1/5 \Rightarrow C(5, 25/5)$ (۰/۵) -۲۰

صفحه: ۷۶

پاسخ فصل چهارم: مشتق

خرداد ۱۴۰۰

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = -1 \quad (./ ۲۵) \Rightarrow f'_+(1) \neq f'_-(1) \quad (./ ۲۵)$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = \infty \quad (./ ۲۵)$$

$f'(1)$ موجود نیست. (۰/۲۵) صفحه: ۹۰

خرداد ۱۴۰۰

$$\text{الف) } f'(x) = \left(\frac{9\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} (9x-2)}{2\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x})^2}{(./ ۲۵)}$$

$$\text{ب) } g'(x) = \underbrace{(6x)(2x-5)^2}_{(./ ۲۵)} + \underbrace{(3)(2)(2x-5)^2(3x^2-4)}_{(./ ۵)}$$

صفحات: ۹۲

خرداد ۱۴۰۰

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(8) - h(5)}{8 - 5} = \frac{0 - (75)}{8 - 5} = -25 \quad (./ ۲۵)$$

(الف-۲۳)

$$h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0.5 \quad (./ ۲۵)$$

(ب)

صفحه: ۹۸